



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

## PERİYODİK OLARAK SÖNÜMLENEN İÇ ISI ÜRETİMİ ETKİSİNDEKİ SİLİNDİRİN AKMA DAVRANIŞI

Tunç Apatay<sup>1</sup> ve Ahmet N. Eraslan<sup>2</sup><sup>1</sup>Gazi Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, Ankara<sup>2</sup>O.D.T.Ü, Mühendislik Bilimleri, Ankara

### ABSTRACT

Based on Tresca's yield criterion, yielding of a solid cylinder subject to periodic internal heat generation is investigated. A state of generalized plane strain is presumed. The cylinder is initially at zero temperature and then internal heat is generated periodically. The surface of the cylinder is kept at its initial temperature throughout. In the first part of the study the temperature distribution in the cylinder is obtained by the use of Duhamel's theorem. Then the corresponding thermoelastic solution is determined. It is observed that the surface of the cylinder is critical and yielding always commences there. Based on the values of the parameters, two different plasticization behaviors may occur. By performing a parametric analysis, deformation chart of the cylinder that dictates the type of the deformation is plotted.

### ÖZET

Periyodik iç ısı üreten bir silindirin akma davranışı Tresca akma kriteri yardımıyla incelenmektedir. Genelleştirilmiş birim şekil değiştirme durumu kabul edilmiştir. Silindir başlangıçta sıfır derece sıcaklığındadır ve daha sonra içerisinde periyodik olarak iç ısı üretilmektedir. Yüzey sıcaklığı daima başlangıç sıcaklığında tutulmaktadır. Çalışmanın birinci kısmında silindir içerisindeki sıcaklık dağılımı Duhamel teoremi yardımıyla belirlenmiştir. Daha sonra karşılık gelen termoelastik çözüm elde edilmiştir. Silindir yüzeyinin akmaya göre kritik olduğu ve akmanın her zaman buradan başlayacağı gözlemlenmiştir. Kullanılan parametrelerin sayısal değerlerine göre iki değişik plastikleşme davranışı söz konusudur. Detaylı bir parametrik analiz yaparak silindirin nasıl ve ne zaman akacağını gösteren deformasyon diyagramı çizilmiştir.

### GİRİŞ

Mühendislikte geniş uygulama alanına sahip olmalarından dolayı silindir çubukların gerilme davranışları bilim adamlarının her zaman ilgisini çeken bir çalışma konusu olmuştur. Yüksek hızlarda dönen silindirler, sıcaklık etkisi altındaki silindirler, ısı üretimi etkisi altındaki silindirler veya bu yüklerin kombinasyonlarının etkisi altında çalışan silindirler bu çalışmaların kapsamını oluşturmaktadır. Literatürdeki çalışmaların büyük bir bölümünde iç ısı üretimi etkisindeki silindirler için ısı üretimi genellikle zamandan bağımsız olarak alınmıştır. Fakat nükleer reaktörlerde, kimyasal uygulamalarda kullanılan silindirlerde ve uzay araçları gibi diğer mühendislik uygulamalarında ısı üretimi zamana bağlı olarak değişim göstermektedir ve bu değişim genellikle periyodik bir fonksiyon şeklinde davranış gösterir [1-3]. Son zamanlarda iç ısı üretimi altındaki silindirler üzerine yapılan çalışmalardan bazıları şu

şekilde sıralanabilir: Walde [1] içi dolu silindirlerde iç ısı üretimi etkisindeki silindirlerde ısıl gerilme dağılımlarını integral dönüşümleri metoduyla elde etmiştir. Bhongade and Durge, zamanla değişken iç ısı üretimi altında çalışan sonlu uzunluktaki içi boş silindirlerde [2] ve ince cidarlı silindirlerde [3] ısıl gerilme dağılımlarını elde etmişlerdir.

Bu çalışmada zamana bağlı bir fonksiyonla periyodik olarak değişen iç ısı üretimi etkisindeki silindir çubuklarda akma davranışı Tresca [4] akma kriteri esas alınarak incelenmiş ve bu davranışın iç ısı üretimini belirleyen parametreler ile ilişkisi irdelenmiştir.

### SICAKLIK DAĞILIMI

Isıl gerilme dağılımının belirlenebilmesi için ilk olarak silindir içerisindeki sıcaklık dağılımı elde edilmiştir.  $b$  yarıçaplı silindir başlangıçta sıfır sıcaklığa sahip olup zamanla  $g(t)$ , ( $t$ , zaman) ile değişen iç ısı üretimi etkisindedir. Isı üretimini belirleyen fonksiyon boyutsuz formda  $G(\tau) = A\tau e^{-\tau/2} \cos \tau$  şeklinde seçilmiştir ve bu fonksiyon zamanla sönümlenerek sıfıra ulaşmaktadır. Burada  $\tau$ , normalize edilmiş zaman,  $A$  ise fonksiyonun genliğini belirleyen bir sabittir. Isı üretimi  $G(\tau) = g(t)b^2 / kT_0$  şeklinde boyutsuzlandırılmıştır. Bu ifadede  $k$  ısıl iletkenlik katsayısı,  $T_0$  bir referans sıcaklığı,  $\tau$  ise  $\alpha_T t / b^2$  şeklinde tanımlanmış normalize edilmiş zamandır.  $\alpha_T$  ise malzemenin ısıl yayılma katsayısıdır.

Silindir içerisindeki sıcaklık dağılımını veren ısı transferi problemi tek boyutta radyal koordinat için aşağıdaki gibidir [5]:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \tau} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{r}^2} + G(\tau); \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1, \quad \tau > 0, \quad (1)$$

ve sınır şartları

$$\begin{aligned} \bar{T}(0, \tau) &= \text{sonlu}, \\ \bar{T}(1, \tau) &= 0, \\ \bar{T}(\bar{r}, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Burada,  $\bar{T} = T/T_0$  boyutsuz sıcaklığı,  $\bar{r} = r/b$  ise boyutsuz radyal koordinatı ifade etmektedir. Bu denklem homojen olmayan bir denklem olduğundan ve zamanla değişen iç ısı üretimini gösteren  $G(\tau)$  terimini içerdiğinden değişkenlerin ayrılması metoduyla çözülemez. Bu noktada problem Duhamel teoremi kullanılarak aşağıdaki şekilde çözülmüştür [5].

$$\bar{T}(\bar{r}, \tau) = \int_0^\tau G(\beta) \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\bar{r}, \tau - \beta) d\beta. \quad (3)$$

Burada  $\Phi(\bar{r}, \tau)$  aşağıda verilen ikincil problemin çözümünü ifade etmektedir;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \bar{r}^2} + 1; \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1, \quad \tau > 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
\Phi(0, \tau) &= \text{sonlu} \\
\Phi(1, \tau) &= 0 \\
\Phi(\bar{r}, 0) &= 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

İkincil problemin çözümü için  $\Phi(\bar{r}, \tau)$  zamana bağlı ve zamandan bağımsız iki fonksiyonun toplamı olarak

$$\Phi(\bar{r}, \tau) = Y(\bar{r}, \tau) + Z(\bar{r}) \tag{6}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadenin (4) denkleminde yerine yazılmasıyla elde edilen diferansiyel denklem zamana bağlı ve zamandan bağımsız olacak şekilde süperpozisyonla  $Y(\bar{r}, \tau)$  ve  $Z(\bar{r})$  için iki diferansiyel denkleme ayrılabilir. Bu denklemlerin çözümü sonunda elde edilen  $\Phi(\bar{r}, \tau)$  ifadesinin (3) denkleminde yerine yazılmasıyla sıcaklık dağılımı;

$$T(\bar{r}, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \int_0^{\tau} G(\beta) e^{-\lambda_n^2(\tau-\beta)} d\beta. \tag{7}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada  $J_0$  ve  $J_1$ , sırasıyla birinci türden sıfırıncı dereceden ve birinci dereceden Bessel fonksiyonlarını göstermektedir.  $\lambda_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ise  $J_0(\lambda) = 0$  ifadesinin pozitif kökleridir.

### ELASTİK ÇÖZÜM

Silindir içerisinde sıcaklık dağılımının Duhamel teoremi ile elde edilmesinden sonra elastik bölgedeki ısı gerilme ve yer değiştirme dağılımları, silindirik koordinatlardaki bünye denklemi ve genelleştirilmiş Hooke bağıntıları [6,7] yardımıyla elde edilen diferansiyel denklemin çözümüyle belirlenmiştir. Bu diferansiyel denklem;

$$\bar{r}^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{r}^2} + \bar{r} \frac{d\bar{u}}{d\bar{r}} - \bar{u} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \bar{\alpha} \bar{r}^2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}}, \tag{8}$$

şeklinde Cauchy-Euler tipindedir ve çözümü ise

$$\bar{u}(\bar{r}) = C_1 \bar{r} + \frac{C_2}{\bar{r}} + \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left( \frac{\bar{\alpha}}{\bar{r}} \right) \int_0^{\bar{r}} \eta \bar{T}(\eta, \tau) d\eta. \tag{9}$$

şeklindedir. Burada  $\bar{u} = Eu/b\sigma_Y$  boyutsuz radyal yer değiştirme,  $\sigma_Y$  malzemenin eksenel çekme durumundaki dayanımı,  $\nu$  poisson oranı,  $\bar{\alpha}$  boyutsuz ısı genleşme katsayısıdır. Yer değiştirmenin silindir merkezinde ( $\bar{r} = 0$ ) tanımlı olabilmesi için integral sabitlerinden  $C_2 = 0$  olmalıdır. Denklem (9) ile verilen yer değiştirme ifadesi ile temel elastisite bağıntıları kullanılarak türetilen gerilme - yer değiştirme ifadeleri yardımıyla gerilme bileşenleri ve yer değiştirme ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\bar{u} = C_1 \bar{r} + \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left( \frac{\bar{\alpha}}{\bar{r}} \right) \int_0^{\bar{r}} \eta \bar{T}(\eta, \tau) d\eta, \quad (10)$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\nu \varepsilon_0 + C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\bar{\alpha}}{1-\nu} \frac{1}{\bar{r}^2} \int_0^{\bar{r}} \eta \bar{T}(\eta, \tau) d\eta, \quad (11)$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\nu \varepsilon_0 + C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{\bar{\alpha}}{1-\nu} \frac{1}{\bar{r}^2} \int_0^{\bar{r}} \eta \bar{T}(\eta, \tau) d\eta - \frac{\bar{\alpha} \bar{T}(\bar{r}, \tau)}{1-\nu}, \quad (12)$$

$$\bar{\sigma}_z = \frac{(1-\nu)\varepsilon_0 + 2\nu C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\bar{\alpha} \bar{T}(\bar{r}, \tau)}{1-\nu}. \quad (13)$$

Burada  $\bar{\sigma}_j = \sigma_j / \sigma_Y$  boyutsuz gerilme bileşenlerini ifade etmektedir.  $\varepsilon_0$  birim şekil değiştirmesi ile  $C_1$  integral sabitinin bulunması için kullanılan şartlardan biri silindirin yüzeyinde radyal gerilme bileşeninin sıfır olmasıdır, yani  $\bar{\sigma}_r(1) = 0$ . Ayrıca genelleştirilmiş düzlem birim şekil değiştirme durumunda silindirin uçları serbesttir dolayısıyla sabitlerin bulunmasında kullanılan diğer şart silindirin eksenel doğrultusundaki net kuvvetin sıfır olmasıdır:

$$F_z = 2\pi \int_0^1 \bar{r} \bar{\sigma}_z d\bar{r} = 0. \quad (14)$$

Böylece  $\varepsilon_0$  ve  $C_1$  şu şekilde elde edilir:

$$C_1 = \frac{\bar{\alpha}(1-3\nu)}{1-\nu} \int_0^1 \bar{r} \bar{T}(\bar{r}, \tau) d\bar{r}, \quad (15)$$

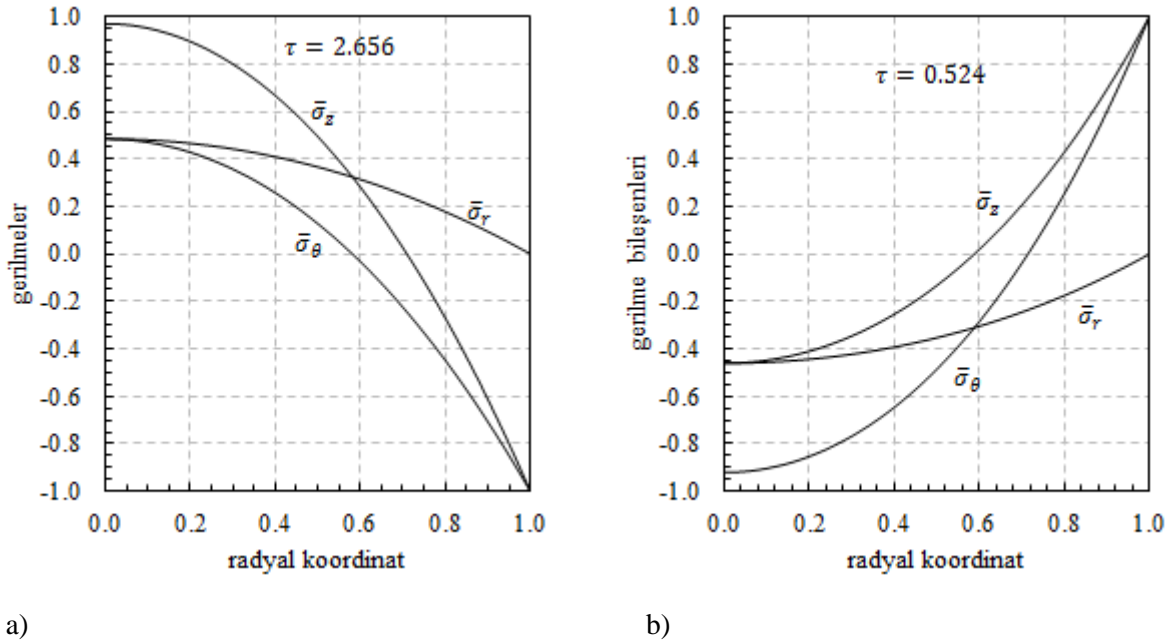
$$\varepsilon_0 = 2\bar{\alpha} \int_0^1 \bar{r} \bar{T}(\bar{r}, \tau) d\bar{r}, \quad (16)$$

### SAYISAL SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Çözüm sonucunda elde edilen elastik gerilme dağılımlarının incelenmesi sonucunda en büyük asal gerilme ve en küçük asal gerilme arasındaki farkın her zaman silindirin yüzeyinde meydana geldiği görülmüştür. Dolayısıyla Tresca akma kriteri dikkate alındığında, akma daima silindirin dış yüzeyinde başlamaktadır. Ancak akma başlangıcında eşdeğer gerilmenin, ısı üretim fonksiyonunun parametrelerine ve değişen zamana bağlı olarak iki farklı formda malzemenin akma sınırına ulaştığı gözlemlenmiştir. Akmadan sonraki davranışı belirleyen plastik gerilme analizinin formülasyonu bu iki farklı duruma göre türetileceğinden bu davranışın belirlenmesi önemlidir.

Şekil 1' de iki farklı ısı yük etkisinde ve farklı malzemeden yapılmış silindirlerin akma başlangıcındaki (boyutsuz formda gerilmeler arasındaki farkın 1'e ulaştığı andaki) elastik limit gerilme dağılımları verilmiştir. Şekil 1a' da akma, silindir yüzeyinde  $\bar{\sigma}_r > \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z$  (A-

durumu) şeklinde başlamaktayken Şekil 1b' deki silindirde akma başlangıcında  $\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z > \bar{\sigma}_r$  (B-durumu) şeklindedir. Şekiller incelendiğinde iki durumda gerilme bileşenlerinin yönlerinin farklı olduğu görülmektedir. Bunun nedeni ısı yük üretiminin periyodik olarak artıp azalmasına bağlı olarak gerilmelerin de yön değiştirerek periyodik bir şekilde artıp azalmasıdır. Şekil 1a' da  $A = 4.0, \bar{\alpha} = 2.5$  parametrelerine sahip silindir  $\tau = 2.656$  limit zamanında akmaya başlarken  $A = 6.5, \bar{\alpha} = 3.2$  parametrelerine sahip silindir verilen silindir  $\tau = 0.524$  limit zamanında akmaya başlamaktadır.



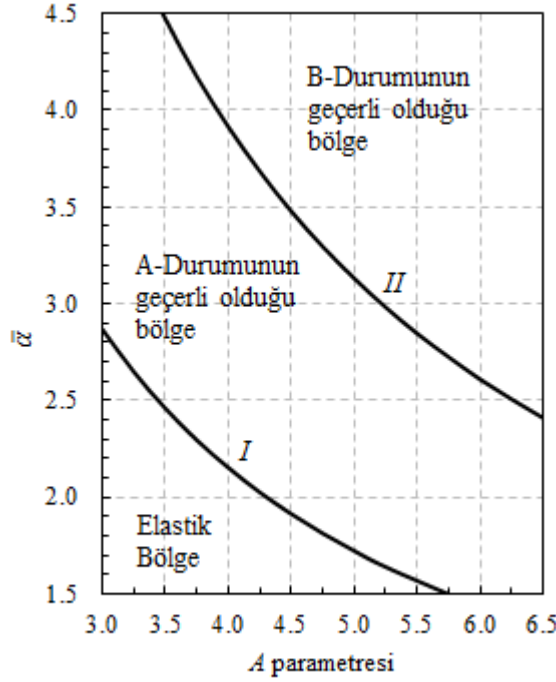
Şekil 1. Elastik limit durumunda gerilme dağılımı, a)  $A = 4.0, \bar{\alpha} = 2.5$  , b)  $A = 6.5, \bar{\alpha} = 3.2$

Gerilme dağılımlarını ve silindirde akmanın başlayıp başlamayacağını belirleyen, ısı üretim fonksiyonunda yer alan  $A$  ve  $\bar{\alpha}$  parametreleridir. Bu parametrelerin hangi değerlerinde akma başlangıcının hangi duruma göre gerçekleşeceği yapılan parametrik analiz sonucu Şekil 2' deki grafikte gösterilmiştir. Şekil 2' de  $I$  ile ifade edilen çizginin altında kalan bölgeden seçilen  $A$  ve  $\bar{\alpha}$  değerleri, silindirde akmaya neden olacak kadar büyük ısı yükler yaratmadığından dolayı bu bölgeden seçilen parametrelere sahip silindirler her zaman elastik deformasyon etkisi altındadır.  $I$  çizgisi A-Durumuna göre elastik limit değerlerini,  $II$  çizgisi ise B-durumuna göre elastik limit değerlerini vermektedir. Yani  $I$  çizgisi üzerinden seçilen parametrelere sahip silindirlerde silindir ucunda belli bir zamanda akma başlangıcına ulaşılmakta fakat zamana bağlı olarak ısı yükün yön değiştirmesiyle plastik bölgeye geçilememektedir. Benzer davranış  $II$  çizgisi üzerinden seçilen parametrelere sahip silindirler için de söylenebilir. Bu durumda ise silindir yüzeyinde belirli bir zamanda B-Durumuna göre akma başlangıcına ulaşılmakta fakat plastik bölge oluşmamaktadır.  $I$  ve  $II$  çizgileri arasında kalan bölgeden seçilen  $A$  ve  $\bar{\alpha}$  değerleri için A-Durumu olarak tanımlanan  $\bar{\sigma}_r > \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z$  gerilme durumuna göre,  $II$  çizgisinin yukarısında kalan bölgeden seçilen parametre değerleri için ise B-Durumu olarak tanımlı  $\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z > \bar{\sigma}_r$  gerilme durumuna göre akma başlamaktadır.

Ayrıca bu şekiller incelendiğinde akmadan sonra iki farklı formda plastik bölgenin oluşacağı görülmektedir. A-Durumu için bu plastik bölgelerde  $\bar{\sigma}_r > \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z$  ve  $\bar{\sigma}_r > \bar{\sigma}_\theta > \bar{\sigma}_z$ , B-

Durumu için ise  $\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_z > \bar{\sigma}_r$  ve  $\bar{\sigma}_\theta > \bar{\sigma}_z > \bar{\sigma}_r$  ilişkilerinin geçerli olacağı görülmektedir. Zamanın artmasıyla beraber bu bölgeler silindirin içine doğru ilerlemesi beklenmektedir.

Sonuç olarak bu iki akma başlangıç durumuna göre silindirin plastik davranışının belirlenebilmesi için iki farklı plastik deformasyon formülasyonu gerekmektedir. Bu çalışma sonucunda sıcaklık dağılımı Duhamel teoremi yardımıyla elde edilen silindirin termoelastik davranışı elde edilmiş, Tresca kriteri dikkate alınarak silindirin plastik davranışının hangi parametreler için hangi duruma göre formüle edilmesi gerektiği belirlenmiştir.



Şekil 2. Akma başlangıç durumunu belirleyen  $A - \bar{\alpha}$  değerleri

### KAYNAKLAR

- [1] Walde, R.T., Pathak, A.C., and Khobragade, N.W. Thermal stresses of a solid cylinder with internal heat source. *International Journal of Engineering and Innovative Technology (IJEIT)*, Vol: 3, 1, 2013.
- [2] Bhongade, C.M., and Durge, M.H. Study of transient thermal stresses in finite hollow cylinder with internal heat generation. *Proceedings of UGC Sponsored National Conference on Frontiers of Mathematics NCFM*, 22-31, 2013.
- [3] Bhongade, C.M., and Durge, M.H. Transient thermal stresses due to instantaneous internal heat generation in a thin hollow cylinder. *International Journal of Mathematics and Statistics Invention (IJMSI)*, Vol: 2, 3, 83-88, 2014.
- [4] Mendelson, A., *Plasticity: Theory and Application*, The Macmillan Company, New York, 1968.
- [5] Hahn, W.D., Özışık, M.N., *Heat Conduction*, John Wiley & Sons, 2012.
- [6] Timoshenko, S., Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, New York, McGraw-Hill, 1970.
- [7] Ugural, A.C., Fenster, S.K., *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*, Prentice-Hall, 2012.